Implicazioni delle relazioni fra epistemologia e insegnamento della matematica per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria

Juan D. Godino e Carmen Batanero
Universidad de Granada

Abstract. *Current trends in the philosophy of mathematics recognize a triple character in this discipline: mathematics as a human endeavor, committed to solving some types of problem situations; mathematics as a symbolic language and a conceptual system logically organized and socially shared, emerging from mathematization activities. Mathematics instruction should be consistent, therefore, with this triple character, both in the general organization of the curriculum, and in the planning of the teacher's actions in the classroom. In this paper we analyze this problem by presenting the design of a curriculum for teaching combinatory at secondary school levels consistent with the these epistemological assumptions.*

Keywords: mathematics education, educational principles, curricular design, didactical units, combinatory

Sunto. *Le attuali tendenze in filosofia della matematica riconoscono un carattere triplice in questa disciplina: la matematica come attività umana, impegnata a risolvere una certa classe di situazioni problematiche; la matematica come linguaggio simbolico; e come un sistema concettuale logicamente organizzato e socialmente condiviso, emergente dall'attività di matematizzazione. L'istruzione matematica deve essere coerente, dunque, con questo carattere ternario, sia nell'organizzazione generale del curricolo, tanto nella pianificazione delle azioni del docente in aula. In questo articolo si analizza il problema, presentando la progettazione di un curriculum per l'insegnamento della combinatoria nei livelli di scuola secondaria, coerente con le ipotesi epistemologiche esplicitate.*

Parole chiave: didattica della matematica, principi didattici, progettazione curricolare, unità didattiche, combinatoria

Resumen. *Las tendencias actuales en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico; y como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. La instrucción matemática debe ser coherente, por tanto, con este triple carácter, tanto en la organización general del currículo, como en la planificación de las actuaciones del profesor en el aula. En este trabajo se analiza esta problemática, presentando el diseño de un currículo para la enseñanza de la combinatoria en los niveles de secundaria concordante con los supuestos epistemológicos explicitados.*

Palabras clave: educación matemática, principios didácticos, diseño curricular, unidades didácticas, combinatoria

1. Relazioni fra la matematica e le sue applicazioni

Per quanto l'epistemologia o teoria della conoscenza sia un ramo della filosofia che può apparire distante dagli interessi pratici dell'insegnante, da tempo si riconosce l'importanza che ha una visione adeguata della natura della matematica come elemento condizionante dei distinti modelli di insegnamento, così come del comportamento degli insegnanti in aula (D'Amore, 1987; 2004; Dossey, 1992; Sriraman & English, 2010). Se si pensa, per esempio, che gli oggetti matematici hanno un'esistenza ideale, indipendente dal soggetto e dalla realtà alla quale essi si applicano, indipendenti perfino dalla cultura, risulterebbe giustificato un insegnamento basato sulla presentazione formale degli oggetti matematici, i quali sarebbero a loro volta fondati sulle loro stesse definizioni. Le applicazioni, i problemi matematici, sarebbero, in questa concezione, un'appendice e in un certo senso sarebbero solo degli "ornamenti" che verrebbero trattati dopo che l'allievo abbia già appreso la matematica. In larga misura, la pratica dell'insegnamento della matematica nei passati decenni è stata dominata da questa concezione.

Se si pensa, al contrario, che la matematica è una costruzione umana che sorge come conseguenza della necessità e della curiosità dell'essere umano di risolvere certe classi di problemi o situazioni determinate dall'ambiente; e che, nello stesso tempo, nell'invenzione degli oggetti matematici ha luogo un processo di negoziazione sociale e che questi oggetti sono fallibili e soggetti a evoluzione; allora l'insegnamento e l'apprendimento devono tener conto di tali processi. Quest'ultima è la posizione delle teorie psicologiche costruttiviste, basate sul costruttivismo sociale come filosofia della matematica, così come descritto da Ernest (1998).

Questa dicotomia fra idealismo-formalista e costruttivismo fu descritta, nel caso della combinatoria, da Kapur (1970) il quale, in piena effervescenza della "matematica moderna", si dichiarava a favore di uno sviluppo del curricolo matematico che riconoscesse il ruolo essenziale delle applicazioni alla crescita della matematica e, pertanto, al suo insegnamento-apprendimento. Nel testo menzionato, Kapur presenta una raccolta di problemi di combinatoria il cui trattamento scolare avrebbe potuto soffocare il movimento di riforma che cercava di impostare un "baby Bourbaki" come testo di insegnamento della matematica pre-universitaria, in consonanza con il Bourbaki universitario. Per quanto si siano oggi superate queste idee della "matematica moderna", un'analisi di questo tipo può ancora essere necessaria da parte del neo laureato che inizia la sua carriera come insegnante e che appena conosce un'altra matematica, al di là di quella "formale" studiata nel corso di laurea universitario.

Nell’articolo citato, Kapur descrive due concezioni estreme sulle relazioni fra la matematica come disciplina scientifica, le sue applicazioni e il ruolo di esse nei processi di insegnamento-apprendimento e che abbiamo mostrato in vari nostri lavori (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2003). La prima di queste concezioni, ancora oggi sostenuta da alcuni matematici, consiste nell’assumere che si debbano prima costruire le strutture della matematica in maniera assiomatica, rigorosa, astratta e logica e solo dopo sovrapporre a queste le strutture delle loro possibili applicazioni. Secondo questa visione non si possono risolvere problemi di applicazione, a meno che non siano banali, se prima non si è dato un buon “fondamento matematico”. Per coloro che accettano questa visione, la matematica pura non ha motivi per avere una stretta relazione con la matematica applicata; essa potrebbe svilupparsi in forma del tutto separata. L’apprendimento dei concetti – in generale, l’acquisizione di strutture di pensiero matematico puro – deve prodursi precedentemente allo sviluppo delle applicazioni. Queste sarebbero un’ “appendice” all’insieme dei metodi matematici e non si produrrebbe alcun danno se tale appendice non fosse tenuta in conto da parte dello studente. Le persone che sostengono questo modo di vedere pensano che la matematica (necessariamente al singolare) è una disciplina autonoma che può mantenere intatta la sua vitalità solo per mezzo di una pura endogamia. Sotto le assunzioni di questa concezione “idealista-platonica” della matematica si può costruire un curricolo quasi perfetto, esteticamente soddisfacente: filtrato dal processo di astrazione sarebbe un dominio di pensiero purificato dal “rumore” del mondo esterno.

Proseguendo con l’esposizione della posizione di Kapur (1970), una seconda concezione sulla matematica considera, al contrario, che la matematica e le sue applicazioni debbano mantenersi in intima relazione lungo il curricolo. In tale concezione, ampiamente assunta da diversi approcci teorici usati nella didattica della matematica attuale, gli studenti dovrebbero capire la necessità di ciascuna parte della matematica prima ancora che essa sia loro presentata. Si pensa perfino che gli studenti dovrebbero “creare” da sé stessi questi contenuti e comprendere come queste matematiche create soddisfino la necessità avvertita (per risolvere un problema o rispondere a una domanda). Se si accetta questo atteggiamento, le applicazioni della matematica, tanto esterne quanto interne, dovrebbero precedere e seguire la creazione della matematica; questa deve apparire come una risposta naturale e spontanea della mente e della creatività umana ai problemi dell’ambiente fisico, biologico e sociale nel quale l’uomo vive. Quando si applica questa concezione all’insegnamento, si assume che gli studenti debbano vedere da sé stessi che l’assiomatizzazione, la generalizzazione e l’astrazione della matematica sono necessarie al fine di comprendere i problemi della Natura e della Società. I sostenitori di questa visione della matematica e del suo insegnamento desidererebbero poter isolare alcune strutture fondamentali della Natura e della Società e costruire le strutture fondamentali della matematica attorno ad esse, in modo che abbia luogo un'integrazione la più perfetta possibile fra la matematica e le sue applicazioni.

L'elaborazione di piani di formazione matematica in accordo con questa concezione *costruttivista* è più difficile, dato che le strutture delle scienze fisiche, biologiche e sociali sono relativamente più complesse e inoltre il professore di matematica dovrebbe acquisire conoscenza dei temi che userà come base per le applicazioni. Pertanto, il riconoscimento dei legami delle strutture di queste scienze con quelle puramente matematiche non è facile. C'è un'abbondanza di materiale disperso che deve essere scelto, però il compito di selezione e integrazione, così come la coordinazione con altre restrizioni del sistema di insegnamento, non sono facili da ottenere.

2. La matematica come attività umana, linguaggio simbolico e sistema concettuale

Tenendo in conto recenti tendenze in filosofia della matematica (Ernest, 1998; Tymoszko, 1986), che sintetizzano posizioni di autori come Wittgenstein e Lakatos, Godino, Batanero e Font (2003) distinguono nella matematica i tre aspetti essenziali seguenti, interrelazioni mutue che devono essere tenuti in conto nell'organizzazione del suo insegnamento.

a. La matematica costituisce un'attività socialmente compartita di risoluzione di situazioni problematiche che si possono riferire al mondo naturale e sociale, o anche possono essere interne alla matematica stessa. Come risposta o risoluzione di questi problemi esterni o interni sorgono e si sviluppano progressivamente gli oggetti matematici (concetti, processi, teorie, …).

b. La matematica può vedersi come un linguaggio simbolico nel quale si esprimono le situazioni-problema e la risoluzione degli stessi; così come la musica, la matematica è un linguaggio universale nel quale i segni usati, la loro semantica e sintassi sono compartiti in tutti i diversi gruppi umani. Come ogni linguaggio, anche questo comporta alcune regole di uso che bisogna conoscere e il loro apprendimento può comportare difficoltà simili all'apprendimento di una lingua non materna.

c. La matematica costituisce un sistema concettuale, logicamente organizzato e socialmente compartito; l'organizzazione logica dei concetti, teoremi e proprietà spiega anche il grande numero delle difficoltà nell'apprendimento; un sistema non può ridursi alle sue componenti isolate, giacché le interrelazioni tra gli stessi ne costituiscono una parte essenziale. Nasce così un paradosso nell'insegnamento della matematica: ciascun concetto non può insegnarsi adeguatamente in forma separata dagli altri concetti; e nemmeno possono insegnarsi i diversi concetti simultaneamente; di conseguenza, si potrebbe pensare che il suo insegnamento è impossibile. Questo problema si risolve, almeno parzialmente, con la considerazione del curricolo “a spirale” (Bruner, 1960); ogni concetto è trattato varie volte lungo il corso dell’insegnamento, le prime volte in modo implicito; progressivamente lo si assume come oggetto di studio in sé stesso, aumentandone il grado di complessità e completezza.

La matematica dunque costituisce una *realtà culturale* costituita da concetti, enunciati, teorie, … (gli oggetti matematici) e il cui significato personale e istituzionale è intimamente legato ai sistemi di pratiche realizzate per la risoluzione delle situazioni-problema (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007).

Come ingredienti caratteristici dell’attività di matematizzazione (Freudenthal, 1991) possiamo evidenziare la rappresentazione simbolica, la ricerca dell’essenziale fra i diversi contesti, situazioni, problemi o processi, la generalizzazione, l’assiomatizzazione, la validazione etc.

3. Conoscere e apprendere la matematica: la sua relazione con la risoluzione dei problemi

Come conseguenza di questa concettualizzazione della conoscenza matematica, *conoscere* o *sapere* matematica, da parte di una persona, non può ridursi a identificare definizioni e proprietà degli oggetti matematici. Deve implicare l’essere in grado di usare il linguaggio e il sistema concettuale matematico nella risoluzione dei problemi. Un soggetto non può attribuire un senso pieno agli oggetti matematici a meno che questi si relazionino con l’attività dalla quale emergono in modo indissolubile (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Di conseguenza, l’attività di risoluzione di problemi è uno dei pilastri dell’apprendimento significativo della matematica. La risoluzione di problemi non deve considerarsi come un nuovo contenuto da aggregare al curricolo matematico, come un’appendice dell’insegnamento tradizionale. Tale attività è uno dei veicoli essenziali dell’apprendimento della matematica, oltre che una fonte di motivazione intrinseca verso la stessa, dato che permette di contestualizzare e personalizzare le conoscenze. Essa permette, altresì, di attribuire significato alle pratiche di tipo matematico realizzate, mediante il riconoscimento di una finalità o intenzione alle stesse (Godino & Batanero, 1994). D’accordo con Brousseau (1986, 1998), il lavoro intellettuale dell’allievo deve essere in certi momenti paragonabile a quello degli stessi matematici: l’allievo dovrebbe avere l’opportunità di fare ricerca su alcuni problemi alla sua portata, formulare, dimostrare, costruire modelli, linguaggi, concetti, teorie, scambiare le proprie idee con altri, riconoscere quelle che sono conformi con la cultura matematica, adottare le idee che possono essergli utili. Al contrario, il lavoro dell'insegnante è in un certo qual senso inverso a quello del matematico professionista: deve produrre ri-contestualizzazioni e una ri-personalizzazione delle conoscenze, dato che deve trovare le situazioni migliori che diano senso a queste conoscenze e aiutare l'allievo nella ricerca delle risoluzioni.

La dimensione culturale della conoscenza matematica è tenuta in conto nell'epistemologia descritta da Brousseau nel proporre che il professore debba offrire agli allievi i mezzi per trovare quel che è il "sapere culturale" che si vuole insegnare loro. Gli allievi devono, a loro volta, ri-decontestualizzare e ri-depersonalizzare il proprio sapere in modo tale da identificare la propria produzione con il sapere che si usa nella comunità scientifica e culturale della sua epoca.

Questa formulazione dell'apprendimento matematico è in relazione con le teorie costruttiviste, ampiamente assunte in modo diffuso, come è provato dalla loro inclusione in documenti curricolari di ampia diffusione (NCTM, 2000):

> Gli studenti apprendono più e meglio quando essi stessi assumono il controllo del proprio apprendimento definendo i propri obiettivi e controllando il proprio progresso. Quando si tratta di sfide con compiti scelti in modo appropriato, gli studenti acquistano fiducia nella propria abilità di affrontare problemi difficili, desiderano risolvere le cose da sé stessi, mostrano flessibilità nell'esplorare idee matematiche e cercare vie di risoluzione alternative, e disposizione alla perseveranza. (NCTM, 2000, p. 20)

I punti di vista costruttivisti sull'apprendimento spostano il centro d'attenzione verso i processi propri della disciplina, il lavoro concreto, la realizzazione di progetti e risoluzione di problemi, invece di dar priorità allo studio dei fatti, leggi, principi e teorie che costituiscono il corpo di conoscenze di detta disciplina.

4. Insegnamento della matematica: necessità di una teoria delle situazioni didattiche

Come s'è detto, in termini generali, la nostra concezione della matematica e del suo apprendimento si situa nell'ambito della posizione costruttivista. Ciò nonostante, consideriamo che l'apprendimento di concetti scientifici complessi, in adolescenti e persone adulte, non segua solo i modelli del costruttivismo individualista in senso stretto (Godino, Batanero, Cañadas, & Contreras, 2015). È necessario indagare sull'applicazione, nell'insegnamento della matematica, di teorie cognitive dell'apprendimento maggiormente integratrici, come quelle di Vygotskij e Ausubel, e agli approcci didattici di educatori matematici come Freudenthal (1991), con la sua proposta metodologica per l'insegnamento della matematica che denomina "reinvenzione guidata", o la Teoria delle situazioni didattiche di Brousseau

(1986, 1998).

Un'interpretazione ingenua del costruttivismo conduce ad attribuire un ruolo limitato all'insegnamento, cioè al lavoro del docente nella sua attività di facilitare l'apprendimento; questo lavoro si ridurrebbe alla scelta di situazioni problematiche significative per gli allievi.

Come abbiamo detto, la matematica non costituisce solo un'attività ma anche un linguaggio simbolico e un sistema concettuale logicamente organizzato, per quanto non in una gerarchia stretta di livelli di astrazione e complessità. Se consideriamo l'apprendimento di una lingua, per quanto la pratica nella conversazione fin dall'inizio da parte dell'apprendente sia una questione fondamentale, se vogliano ottenere un apprendimento funzionale che permetta la comunicazione, il progresso conseguito, una volta superata la tappa iniziale, è molto scarso se non si realizza anche uno studio sistematico della grammatica di tale lingua.

D'altra parte, disponiamo di tutto un sistema concettuale previo che ci è dato dalla risoluzione di una grande quantità di problemi e che risulta dal lavoro precedente delle menti matematiche più capaci. Questa eredità resterebbe inutilizzata se ogni studente dovesse riscoprire da sé stesso tutta la matematica che si cerca di fargli apprendere. La scienza, in particolare la matematica, non si costruisce nel vuoto, ma sopra i pilastri delle conoscenze costruite dai nostri predecessori. Lo scopo dell'insegnamento della matematica non è solo rendere gli allievi capaci di risolvere quei problemi la cui risoluzione già conosciamo, ma prepararli a risolvere problemi che ancora non siamo in grado di risolvere. A tale scopo, dobbiamo abituarli a un lavoro matematico autentico, che non include solo la risoluzione dei problemi, ma anche l'uso delle conoscenze previe nelle loro stesse risoluzioni.

Di conseguenza, consideriamo che le teorie associazionistiche dell'apprendimento (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983) applicate alla formazione di concetti e alla conoscenza di certe relazioni e rappresentazioni si può ottenere in modo efficace con l'aiuto delle spiegazioni del docente e con l'interazione sociale in aula, congiunta all'attività di risoluzione di problemi.

L'attenzione sistematica ai tre aspetti o dimensioni della matematica (attività, linguaggio, rete concettuale) è alla base, ci sembra, della Teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (1986, 1998), che propone la progettazione di situazione di formulazione/comunicazione, validazione e istituzionalizzazione come complementi imprescindibili delle situazioni di azione e di ricerca. Il tipo di discorso, cioè la comunicazione orale o scritta in aula, realizzata dal docente e dagli allievi, è un aspetto centrale determinante del fatto che gli allievi apprendano qualcosa sulla matematica. Se il nucleo della comunicazione si produce solo da parte del docente verso gli allievi, per esempio in forma scritta sulla lavagna, gli allievi apprenderanno una matematica diversa, acquisiranno una visione diversa della matematica, rispetto a quel che si produce quando ha luogo una comunicazione più ricca e diversificata fra docente e allievi e di questi ultimi fra loro.

Inoltre, le situazioni di azione devono basarsi su problemi genuini que attraggano l'interesse degli allievi affinché essi li assumano come propri e desiderino risolverli; tali situazioni costituiscono un primo incontro degli allievi con gli oggetti matematici impliciti, incontro nel quale si offre l'opportunità di ricercare da sé stessi possibili risoluzioni, individualmente o in piccoli gruppi.

La Teoria delle situazioni didattiche formulata da Brousseau costituisce, dal nostro punto di vista, una teoria dell'apprendimento organizzato della matematica, cioè una teoria dell'insegnamento della matematica, in accordo con i presupposti epistemologici e psicologici mostrarti in precedenza. Descrive un ambiente di apprendimento potente nel quale non solo si presta attenzione al sapere matematico posto in gioco nelle proposte di lavoro, ma anche alle attività di comunicazioni in aula, tutto ciò in una sequenza ordinata di situazioni didattiche.

5. Implicazioni per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria nella secondaria

La prospettiva della matematica e del suo insegnamento abbozzati nei paragrafi precedenti deve avere conseguenze sulla progettazione di piani di educazione matematica, cioè nel curricolo matematico, inteso come un piano operativo che descrive in dettaglio che tipo di matematica devono conoscere gli allievi, che cosa devono fare i docenti per far sì che i propri allievi sviluppino proprie conoscenze matematiche e quale deve essere il contesto nel quale abbia luogo il processo di insegnamento - apprendimento (NCTM, 1989).

Nel seguito, sintetizziamo le ipotesi didattiche che a nostro avviso devono guidare l'elaborazione di proposte curricolari per l'educazione matematica, che siano coerenti con i presupposti epistemologici evidenziati in precedenza.

1. Lo scopo principale dell'azione del docente in aula è quello di aiutare gli allievi a sviluppare il proprio ragionamento matematico, la loro capacità di risolvere problemi, di formulazione e comunicazione di idee matematiche e lo stabilire relazioni fra le diverse parti della matematica e delle altre discipline. Allo stesso tempo, è prioritario favorire una buona disponibilità verso la matematica e il suo operare.

2. Si deve prestare un'attenzione particolare all'organizzazione dell'insegnamento e dell'apprendimento: quel che gli allievi apprendono dipende fondamentalmente da come si realizza l'apprendimento. Quest'affermazione comporta, oltre che una meticolosa selezione dei compiti, la progettazione di situazioni didattiche che forniscano opportunità agli allievi di indagare personalmente problemi significativi per loro stessi e rilevanti dal punto di vista matematico, a formulare ipotesi

e congetture, usare diversi tipi di rappresentazioni; a validare le proprie risoluzioni e comunicarle agli altri, all'interno di un clima cooperativo e di discussione scientifica.

3. Bisogna condurre l'allievo al riconoscimento progressivo del grado di sviluppo attuale della matematica, come insieme di conoscenze e della sua applicabilità in distinti rami dell'attività umana. Lo scopo che si vuol perseguire è l'assimilazione progressiva della conoscenza matematica da parte degli allievi, cioè la costruzione di una rete di concetti e processi, così come il dominio del linguaggio matematico, in accordo con la conoscenza matematica obiettiva. A questo scopo si devono progettare situazioni specifiche di istituzionalizzazione delle conoscenze che si pretende raggiungere.
4. Il curricolo deve essere flessibile per poter essere adattato alle capacità dei diversi allievi.
5. Gli obiettivi relativi all'apprendere a realizzare congetture e argomenti, formulare e risolvere problemi, dunque un apprendimento significativo della matematica, devono essere raggiunti da tutti gli allievi. Per questo si devono proporre situazioni problematiche introduttive sulle quali tutta la classe possa lavorare; ma, in più, si devono proporre attività di sviluppo e suggerimenti per gli alunni più capaci.
6. L'osservazione continua dei processi di insegnamento-apprendimento deve essere la strategia principale per la valutazione degli stessi.

5.1. Elementi per una progettazione curricolare per l'insegnamento dell'analisi combinatoria

A mo' di esempio, descriviamo, di seguito, i principali elementi di una proposta di sviluppo curricolare della combinatoria, presentata con dettagli in Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). L'organizzazione generale di questo curricolo tiene conto della struttura della combinatoria, il campo di problemi che danno senso alla stessa, così come gli aspetti rappresentativi e simbolici. Gli atteggiamenti matematici e la valorizzazione dell'attività matematica da parte degli studenti si otterranno come conseguenza del progetto globale del curricolo e delle relazioni personali e affettive che il docente perseguirà in aula.

In Spagna, l'insegnamento della combinatoria è rimasto isolato dal resto dei temi del curricolo matematico, fatta eccezione della probabilità. Questo insegnamento si è centrato nell'apprendimento di formule combinatorie e nella realizzazione di esercizi di calcolo di espressioni combinatorie, o nell'identificazione dell'operazione combinatoria contenuta in un enunciato verbale. Forse a causa di questa impostazione, il tema è stato considerato come uno dei più difficili da parte dei docenti i quali, con frequenza, hanno preferito omettere il suo insegnamento. Perfino nelle progettazioni curricolari (MEC, 2007; MECD, 2014), il tema è stato praticamente soppresso, essendo ridotto a una timida menzione nel conteggio e nei diagrammi ad albero all'interno del tema dedicato alla probabilità.

Queste omissioni contrastano con le proposte degli "Standard" del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics degli USA) (1989), nelle quali si afferma che il ragionamento combinatorio è uno strumento utile negli schemi cognitivi degli studenti dato che è la base della matematica discreta, il cui insegnamento è stato invocato da numerosi autori (Kenney & Hirsch, 1991). Nei Principi e Norme 2000 (NCTM, 2000) si includono le principali questioni di questo ramo della matematica, che si distribuiscono attraverso differenti Norme di contenuto, invece di ricevere un trattamento separato, e si trattano a tutti i livelli scolastici. Tali questioni appaiono come componenti attive della matematica contemporanea, ampiamente utilizzate nelle scienze biologiche, nella fisica e nella chimica (Batanero, Godino, & Navarro-Pelayo, 1997; English, 2005).

I problemi combinatori costituiscono un mezzo eccellente per far sì che gli studenti realizzino attività di matematizzazione, per dar significato ad altri strumenti concettuali di base e per porre in relazione diversi rami della matematica fra loro. Si deve poi ricordare che la capacità combinatoria è considerata, da parte di Piaget e Inhelder (1951), come un costituente fondamentale del ragionamento formale e che Fischbein (1975) sottolinea la necessità di stimolare lo sviluppo psicoevolutivo del ragionamento combinatorio mediante un'istruzione appropriata. Per tutto ciò, il ragionamento combinatorio non si sviluppa in modo spontaneo e l'insegnamento che si è proposto fino a oggi non sembra migliorare il ragionamento combinatorio né negli allievi della secondaria né in quelli con una preparazione matematica avanzata (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 1997; Godino, Batanero, & Roa, 2005).

Per le ragioni descritte, la combinatoria dovrebbe essere una parte integrante del curricolo e svilupparsi lungo diverse tappe educative, seguendo l'idea di curricolo a spirale. Una prima scelta nell'elaborazione di tale curricolo è la sua distribuzione lungo un prolungato periodo di tempo. In Batanero et al. (1994) si propongono unità didattiche dall'ultimo anno di educazione primaria (età degli allievi 10-11 anni) fino alla fine della scuola secondaria (età degli allievi 17-18 anni). I concetti e i processi si presentano ciclicamente, incrementando progressivamente la profondità dello studio. Invece di limitarci alle classiche unità su variazioni, combinazioni e permutazioni, l'analisi combinatoria elementare si presenta strutturata in accordo a tre modelli specifici che permettono di risolvere una grande quantità di problemi combinatori, tanto semplici quando complessi: i modelli di campionatura, la collocazione di oggetti in urne e di partizione di insiemi (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino,1997). La potenza dei processi combinatori si presenta anche in riferimento alle successioni ricorsive, metodi logici, grafi a albero etc. che si usano per connettere il tema con la matematica discreta, della quale l'analisi combinatoria è un nucleo centrale (English, 2005).

Noi riteniamo che il curricolo matematico deve tener conto della struttura dei campi concettuali e procedimentali corrispondenti, della loro indipendenza rispetto ai campi di situazioni-problema prototipici dai quali emergono e alle peculiarità del linguaggio simbolico matematico. Assumendo questa idea di curricolo e tenendo conto dei supposti epistemologici e didattici enunciati nei paragrafi anteriori, la nostra proposta di un curricolo per l'insegnamento della combinatoria sviluppata in Batanero et al. (1994) include i seguenti elementi.

a. Una rassegna di problemi combinatori nei quali sono rappresentati sistematicamente i distinti tipi di problemi e situazioni di uso e le variabili di compito corrispondenti, classificati secondo livelli di complessità. La combinatoria è stata divisa in una serie di nuclei tematici (Tabella 1), per ciascuno dei quali abbiamo selezionato una sequenza di situazioni-problema che, dal nostro punto di vista, danno senso a tale nucleo concettuale o procedimentale, mostrando agli allievi la gamma di diverse applicazioni della combinatoria e i suoi legami con altre nozioni matematiche. Nella Tabella 2 si classificano i problemi combinatori secondo diversi criteri. La Tabella 3 descrive i contesti di applicazione inclusi nella raccolta di problemi facenti parte della proposta curricolare.

b. I concetti, modelli e tecniche combinatorie elementari emergono e acquistano senso attraverso la messa in evidenza di situazioni-problema e delimitano la conoscenza matematica obiettivo dell'analisi combinatoria elementare. La Tabella 4 contiene i diversi modelli combinatori e i processi tenuti in conto nello sviluppo delle diverse unità didattiche.

Tabella 1
Relazione di unità didattiche

Insegnamento primario 1. Enumerazione sistematica. 2. Regola del prodotto e diagrammi ad albero. **Insegnamento secondario di I grado** 3. Grafi. Regola della somma. 4. Modello del collocamento. Caso di oggetti distinti. 5. Modello del collocamento. Caso di oggetti indistinguibili.	**Insegnamento secondario (biennio della scuola secondaria di II grado)** 6. Campioni ordinati. Variazioni. 7. Permutazioni. Numeri fattoriali. 8. Campioni non ordinati. Combinazioni. **Insegnamento secondario (triennio della scuola secondaria di II grado)** 9. Collocazione e distribuzione di oggetti. 10. Sottopopolazioni e partizioni. Numeri della combinatoria. 11. Principio di inclusione ed esclusione. Altri metodi logici. 12. Procedimenti analitici. Funzioni generatrici.

Tabella 2
Classificazione dei problemi combinatori

In base alla soluzione richiesta: – esistenza – enumerazione – conteggio – classificazione – ottimizzazione – proprietà dei numeri combinatori e manipolazioni algebriche **In base al numero di operazioni combinatorie:** – semplice – composto **In base al modello combinatorio implicito nell'enunciato:** – selezione – collocazione – partizione – ordinamento	**In base al tipo di oggetti che si combinano:** – persone – numeri – lettere – oggetti **In base alla grandezza dei parametri e se sono variabili:** – piccoli – grandi – non variabili – variabili

Tabella 3
Contesti di applicazione della combinatoria

Probabilità: Enumerazione di possibilità Applicazione della regola di Laplace Distribuzioni discrete di probabilità Cammini aleatori Numeri aleatori; aleatorietà Coincidenze **Statistica:** Calcolo di momenti Progettazione di esperimenti Campionatura **Geometria:** Ricoprimenti piani Figure geometriche Intersezioni, reticolati Composizioni di figure	**Biologia:** Trasmissione di caratteri ereditari Codice genetico **Fisica:** Teoria cinetica dei gas **Chimica:** Enumerazione degli isomeri **Teoria dei grafi:** Cammini, circuiti, traiettorie Colorare vertici, spigoli, regioni **Matematica ricreativa e giochi:** Quadrati magici Arte, disegno, attività manuali Passatempi numerici Domino Scacchi

Teoria dei numeri: Numeri figurati Decomposizione di un numero naturale in addendi Numero dei divisori di un naturale Divisibilità Sistemi di numerazione Aritmetica modulare Numeri interi **Algebra:** Gruppi di permutazioni; gruppi ciclici Potenza del binomio; triangolo di Pascal Matrici, Determinanti Equazioni con soluzioni intere Funzioni polinomiali; sviluppo in serie Teoria degli insiemi; applicazioni	Altri **Scienza della computazione:** Immagazzinamento dell'informazione Codici e linguaggi Algoritmi **Ricerca Operativa:** Determinazione di strade; trasporti Assegnazioni Distribuzione e collocamento di oggetti e persone Organizzazione de comitati, tornei Produzione

Tabella 4
Modelli e processi combinatori

MODELLI COMBINATORI **1. Modello di selezione:** Popolazione e campionatura Campionatura ordinata con sostituzione: – Variazioni con ripetizione Campionatura ordinata senza sostituzione: – Variazioni; Permutazioni – Permutazioni con ripetizione – Permutazioni circolari – Combinazioni – Combinazioni con ripetizioni **2. Modello di collocazione/assegnazione: applicazioni** Collocazione di oggetti distinguibili in caselle distinte: 1. Applicazioni iniettive: variazioni 2. Applicazioni biiettive: permutazioni 3. Applicazioni qualsiasi: variazioni con ripetizione Collocazione di oggetti indistinguibili in caselle distinte:	PROCEDIMENTI COMBINATORI **Procedimenti grafici:** Diagrammi a albero Grafi **Procedimenti numerici:** Regole basiche di calcolo combinatorio: – Regola del prodotto – Regola della somma – Regola del quoziente Numeri combinatori Numeri fattoriali Numeri di Stirling **Procedimenti logici:** Classificazione Dimostrazione per assurdo Dimostrazione per induzione Enumerazione sistematica Principio di inclusione-esclusione Ricorsività

– Applicazioni iniettive: combinazioni – Applicazioni qualsiasi: combinazioni con ripetizione – Altre possibilità nel modello di collocazione **3. Modello di partizione:** – Traduzione al modello di collocazione – Caso della bipartizione	**Procedimenti tabulari:** Matrici Tavole **Procedimenti analitici:** Funzioni generatrici

5.2. *Elementi per la programmazione d'aula*

Nel testo citato di Batanero et al. (1994) si offre al docente un'informazione di base per la progettazione di unità didattiche in accordo con i principi pedagogici che abbiamo descritto in precedenza. Proponiamo che ciascuna unità sia organizzata attorno a un contenuto matematico o a un processo il cui apprendimento si auspica in modo specifico. Questo non significa che tale oggetto matematico si tratti solo in detta unità, né che appaia isolato. Tutto al contrario, in ciascuna unità si "lavorerà" con un ricco "sciame" di oggetti, la maggior parte in modo implicito, cioè come una ferramenta concettuale che interviene nella risoluzione di problemi. Inoltre, il contenuto preteso in una unità sarà usato e posto in relazione con altri in distinte unità, il che completa il suo significato.

L'informazione che proponiamo al docente su ciascuna unità sotto forma di orientamenti metodologici (non prescrittivi, per quanto a volte scriviamo "si dovrebbe…"), può essere utile per l'elaborazione dei suoi progetti curricolari di aula sul tema della combinatoria. Questa informazione è stata strutturata nei quattro punti che descriviamo qui di seguito.

Descrittori dell'unità

Qui indichiamo il livello di insegnamento per il quale l'unità è proposta, gli obiettivi prioritari attesi, i contenuti (concetti, proprietà e processi) che compongono il contenuto indicato nel titolo dell'unità, i requisiti previ che, in relazione alla conoscenza, gli allievi devo possedere per lo sviluppo dell'unità e l'eventuale materiale manipolativo, quando se ne presenti qualcuno.

Situazioni, problemi, esercizi

In questo paragrafo forniamo una raccolta di enunciati di situazioni problematiche attorno alle quali dovrebbe far perno l'attività di classe e il discorso di allievi e docente. Queste attività le classifichiamo in 3 gruppi: (1) situazioni introduttive; (2) situazioni complementari; (3) esercizi e applicazioni.

Nelle situazioni introduttive e complementari si propongono attività dalle quali emerge in modo specifico il contenuto atteso nell'unità. Generalmente, per ogni situazione si propongono varie questioni di complessità progressiva, cominciando con domande nelle quali si lascia che sia lo studente a esplorare il problema traendo le proprie risoluzioni. Esse costituiscono pertanto le consegne iniziali per generare in classe un ambiente che promuova l'interesse degli allievi (o, almeno, così si spera) e un atteggiamento da ricercatore da parte degli stessi.

Le situazioni e le domande che seguono servono a introdurre diverse variabili di compito e livelli di complessità del contenuto proposto e tentano progressivamente di approfondire tale contenuto, guidando l'allievo nella sua propria costruzione di conoscenza. Dunque, possono essere usate per tener conto della diversità delle capacità degli allievi. Per quanto inizialmente tutti gli allievi possono lavorare sopra una stessa situazione introduttiva, le domande più complesse e le situazioni complementari più complesse possono essere proposte agli allievi più interessati.

Gli enunciati degli esercizi e applicazioni rispondono alla necessità che gli allievi acquisiscano un certo dominio delle tecniche introdotte e le applichino a nuove situazioni.

Analisi dei contenuti e della gestione della classe

Come abbiamo detto, la teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986, 1998) che ci serve di riferimento evidenzia il ruolo delle situazioni di azione per far sì che gli allievi diano senso alle nozioni e ai processi della matematica. Però sarebbe ingenuo pensare che, proponendo problemi più o meno ingegnosi agli allievi, questi possano ricreare tutta la matematica. Così, dietro a ogni situazione di azione, nella quale gli allievi hanno cercato di trovare e di formulare le risposte pertinenti (lavorando in gruppo, preferibilmente) è necessario organizzare situazioni (o momenti) di comunicazione dei risultati e di argomentazione o validazione dei risultati proposti.

In questo modo si sarà ottenuto di creare condizioni propizie per il momento o situazioni di istituzionalizzazione delle conoscenze attese, con il grado di formalizzazione che il docente giudichi pertinente secondo lo sviluppo delle situazioni previe e il livello specifico degli allievi. Nello stesso modo, il docente dovrà fare riferimento ad altri oggetti matematici già conosciuti dagli studenti e a problemi trattati precedentemente; questo aiuterà a stabilire collegamenti matematici fra i vari temi.

Tutto questo lavoro del docente racchiude una notevole complessità ed è di grande importanza, giacché piccoli cambi nella gestione della classe (nell'ordine: presentazione delle diverse problematiche, suggerimenti che si offrono agli studenti in momenti chiave dei processi di risoluzione, considerazioni sul grado di formalizzazione finale) condizionano l'apprendimento raggiunto dagli allievi.

Allo scopo di cercare di aiutare il professore in questo delicato lavoro, abbiamo incluso nella sezione che chiamiamo "analisi dei contenuti e della gestione di classe" alcune indicazioni su possibili connessioni matematiche e sul tipo di istituzionalizzazione auspicabile. Come si descrive in Godino, Batanero, Cañadas e Contreras (2015), per quanto sia necessario stabilire progetti istituzionali basati sull'uso di situazioni-problema interessanti, che guidino l'apprendimento e la presa di decisioni a livello globale e intermedio, il funzionamento locale dei sistemi didattici richiede un'attenzione speciale alla gestione delle conoscenze previe necessarie degli studenti per la risoluzione delle situazioni e alla sistematizzazione delle conoscenze emergenti. Le decisioni sul tipo di aiuto che è necessario dare agli studenti hanno una componente essenzialmente locale e sono responsabilità del docente, il quale necessiterà di guide che lo orientino nella presa in carico di decisioni per ottimizzare l'idoneità didattica dei processi di studio che deve gestire.

Risoluzioni di situazioni, problemi e esercizi

Per quanto crediamo che i docenti ai quali si dirige il libro citato siano assolutamente in grado di risolvere le questioni che si propongono nelle diverse unità, abbiamo creduto fosse conveniente offrire le risoluzioni delle stesse. In alcuni casi perché la risoluzione può richiedere un tempo eccessivo del quale il docente abitualmente non dispone. Inoltre, solo mediante un esame dettagliato dei possibili processi di risoluzione si possono apprezzare i concetti, i processi matematici, le proposizioni e le argomentazioni che si succedono e si sviluppano negli stessi, le difficoltà specifiche che possono sorgere e la tipologia specifica del ragionamento combinatorio che interessa sviluppare.

Come esempio includiamo qui di seguito in un annesso un'unità didattica sulla "regola del prodotto e diagrammi ad albero" sviluppata secondo lo schema che abbiamo descritto sopra.

6. Conclusioni

Nel presente lavoro abbiamo esplicitato la nostra concezione per quanto riguarda la natura della matematica, così come le conseguenze relative all'insegnamento che, secondo il nostro criterio, derivano dalla stessa. Abbiamo anche spiegato come sono stati tenuti in conto questi principi nell'elaborazione di un curricolo di combinatoria, analizzando le decisioni prese nella sua elaborazione e presentando come annesso un esempio di unità didattica.

Crediamo che l'attenzione ai tre aspetti della conoscenza matematica (agire, linguaggio, sistema concettuale) nei processi di insegnamento-apprendimento rende più complesso il lavoro del docente nelle aule, e pertanto si mette in evidenza lo sviluppo di materiali curricolari che, senza soffocare la sua necessaria creatività, rendono percorribile un rinnovamento dell'educazione matematica. La scelta precisa di situazioni problematiche prototipiche di una conoscenza profonda nel campo di problemi e del corrispondente contenuto, normalmente non è alla portata del docente.

Con frequenza, il discorso psicopedagogico ignora le complessità del contenuto dell'insegnamento, richiedendo al docente compiti che non sono alla sua portata, esigendo da lui che applichi alla sua pratica quotidiana analisi che richiederebbero un tempo e delle conoscenze teoriche che non sono a disposizione dei docenti. La ricerca didattica deve apportare soluzioni pratiche a questi problemi. L'elaborazione di testi per la formazione iniziale e in servizio dei docenti come quello descritto potrebbe costituire un contributo significativo a questo scopo.

Nota. *Lavoro realizzato nell'ambito dei progetti di ricercare EDU2012-31869 ed EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).*

Riferimenti bibliografici

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2ª ed.). México: Trillas.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro–Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239–252). Amsterdam: International Statistical Institute and I.O.S. Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181–199.

Batanero, M. C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis. Disponibile su http://www.sintesis.com/educacion-matematica-en-secundaria-70/razonamiento-combinatorio-ebook-1309.html

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

D'Amore, B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. Actas del "II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática" (pp. 323–324). Valencia 1987.

D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 4–30.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39–48). New York: Macmillan.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for* *teaching and learning* (pp. 121–141). New York: Springer.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics.* New York: SUNY.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1)*,* 97–124.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. London: The Falmer Press.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Los Autores. Disponibile su http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2) 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 3–36.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., & Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249–269), Universidad de la Sabana (Bogotá, Colombia).

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1)*,* 111–127.

Kenney, M. J., & Hirsch, C. R. (1991). *Discrete mathematics across the curriculum, K-12. 1991 Yearbook*. Reston (VA): N.C.T.M.

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Sriraman, B., & English, L. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. In B. Sriraman & L. English, (Ed.), *Theories of mathematics education* (pp. 7– 32). Berlin: Springer.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston: Kirkhauser.

APPENDICE: Esempio di unità didattica inclusa in Batanero et al. (1994)

Regola del prodotto e diagrammi ad albero

1. Descrittori dell'unità didattica

ALLIEVI: Scuola primaria (10-11 anni).
OBIETTIVI: Si ipotizza che gli allievi:

- rinforzino l'acquisizione dei processi sistematici di enumerazione
- conoscano il diagramma ad albero per rappresentare situazioni di enumerazione
- scoprano la regola del prodotto, appoggiandosi sul diagramma ad albero, e la applichino per risolvere problemi di conteggio.

CONTENUTI:
Concetti e proprietà:

- regola del prodotto: numero di elementi del prodotto cartesiano di due o più insiemi.

Processi:

- sperimentazione con giochi manipolativi di enumerazione
- enumerazione degli elementi del prodotto cartesiano di due insiemi
- costruzione di un diagramma ad albero per rappresentare gli elementi del prodotto cartesiano
- interpretazione di diagrammi ad albero costruiti preventivamente
- calcolo del numero di configurazioni combinatorie applicando la regola del prodotto.

REQUISITI PREVI: Abilità basiche sui numeri naturali.
MATERIALI: Regoli incastrabili di diversi colori. Cartoncini per disegnare e ritagliare figure di animali diversi. Immagini ritagliabili di una bambola con varie gonne e camicette. Carte e colori.

2. Situazioni, problemi ed esercizi

SITUAZIONI INTRODUTTIVE

A. Il gioco delle torri

Si divide la classe in gruppi di 6 allievi, dando a ciascun gruppo una scatola con regoli incastrabili di diversi colori, per esempio blu e rosso.
Si propone loro di formare tutte le diverse possibili torri incastrando tre regoli. Per esempio, possono costruire una torre con tre regoli rossi, come appare nella Figura 1.

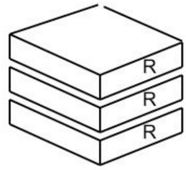

Figura 1

Vince il gruppo che per primo forma tutte le torri possibili.
Una volta terminata l'attività, si possono porre le seguenti domande:
(1) Quante torri diverse si possono formare? Siete sicuri che non ne manca nessuna? Inventate un grafico (disegno o schema) che mostri il

metodo che avete seguito.
(2) Siete capaci di calcolare, senza però costruirle in realtà, quante torri diverse si possono costruire con 4 piani? Come avete fatto a fornire la risposta?
(3) Quante torri diverse di 3 piani si possono costruire con 4 colori diversi (blu, bianco, rosso e verde)?

B. L'albero genealogico
Si tratta di far sì che ciascun allievo costruisca o disegni il suo albergo genealogico fino a giungere al bisnonno o al trisavolo. Cominciamo con un quadretto nel quale l'allievo scrive i propri nome e cognome (Figura 2).

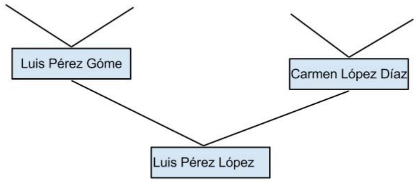

Figura 2

Successivamente si tracciano due segmenti che partono dalla cima in alto del quadretto verso l'alto e, negli estremi di ciascun segmento, si mettono altri due quadretti con i nomi e cognomi di mamma e papa (Figura 2). Per ciascuno di tali quadretti si ripete l'operazione, fin dove sia possibile ricordare. Si può chiedere aiuto ai genitori e ai nonni per costruire l'albero il più completo possibile. Relativamente a questa attività, si pongono le seguenti domande: guardando l'albero, potresti calcolare quanti bisavoli, trisavoli eccetera ha ciascun bambino?

SITUAZIONI COMPLEMENTARI

C. Modelli colorati
(1) Abbiamo una striscia di carta divisa in 5 quadratini contigui (fig. 3), ciascuno dei quali può essere lasciato in bianco o colorato. Colorando ciascun quadrato in tutti i modi possibili, quante strisce colorate in modo diverso si possono ottenere?
(2) Alcune delle strisce colorate sono simmetriche, in quanto al colore, come quella di Figura 3. Quante strisce colorate in modo simmetrico possiamo ottenere al massimo?

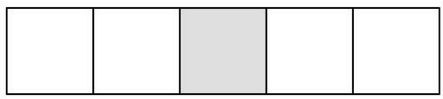

Figura 3

(3) Prendiamo adesso un quadrato. Tracciamo una diagonale (Figura 4) e coloriamo ogni regione di un colore diverso. Ruotando il quadrato iniziale di 90°, otteniamo i quadrati di Figura 5.

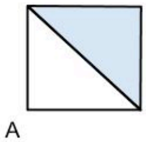

Figura 4

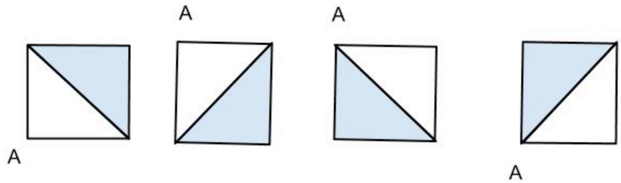

Figura 5

Se adesso incolliamo due di questi quadrati, il secondo alla destra del primo, quanti disegni diversi possiamo ottenere? Si possono semplicemente disegnare i vari rettangoli che si formeranno.
(4) E se li uniamo a 4 a 4 in modo contiguo verso destra, quante saranno le configurazioni diverse che si possono ottenere?

D. Prigionieri
(1) In una prigione ci sono 6 celle individuali. Scrivi tutte le forme in cui si possono distribuire 2 prigionieri in 2 celle. Aiutati con un grafico.
(2) Quante distribuzioni possibili si hanno se si devono collocare 4 prigionieri nelle 6 celle?

E. Esercizi e applicazioni
(1) *I vestiti della bambola*
Con una bambola reale o con un suo disegno e un numero dato di gonne e di camicette diverse, verificare in quanti modi diversi si può vestire la bambola. Si può usare un diagramma ad albero.

(2) *Semafori*
Si tratta di colorare tutti i modi diversi in cui può accendersi la luce di un semaforo (ha tre luci: rossa, gialla e verde). Supponiamo poi di avere un semaforo guasto nel quale possano accendersi simultaneamente tre, due, una o nessuna luce.

(3) *Animali immaginari*
Disegnare su ciascun cartoncino un animale, per esempio un cane, un maiale, una tigre e un leone. Ora si taglia ciascun cartoncino in due parti, in una parte la testa e nell'altra il resto del corpo. Formate tutti gli animali combinando teste e corpi diversi. Quanti animali risultato?

(4) *Numero di telefono*
Quanti numeri di telefono di quattro cifre si possono formare con le cifre da 0 a 9?

(5) *Codice segreto*

Pietro e Giovanni hanno creato un codice segreto. Per decifrare un messaggio devono cercare le lettere che lo compongono con l'aiuto della chiave data nel diagramma ad albero della Figura 6. Lo 0 indica che si deve seguire il ramo sinistro, l'1 indica che si deve seguire il ramo destro. Quando si arriva a una lettera si deve ricominciare dall'inizio dell'albero. Per esempio, il messaggio ADELA si scrive:

00001100101000

Decifra il seguente messaggio:
001000001001000.

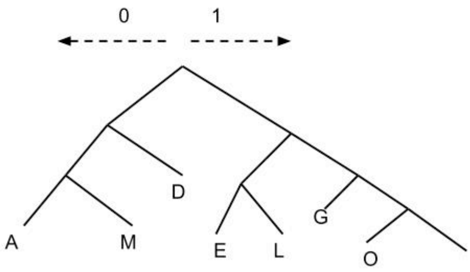

Figura 6

3. Analisi dei contenuti e gestione della classe

Il contenuto matematico atteso nelle situazioni di questa unità è la "regola del prodotto" espressa in casi semplici e in contesti manipolativi, e l'introduzione di una rappresentazione grafica importante nell'insegnamento della combinatoria che è il diagramma ad albero.

Il numero di pezzi delle torri della situazione A e dei colori degli stessi sono variabili di controllo della situazione che permettono di porre l'allievo di fronte alla necessità di generalizzare ricorsivamente le soluzioni trovate con valori maggiori.

Se, nel terminare lo sviluppo dell'attività A (gioco delle torri) o durante la stessa sorgessero delle difficoltà insuperabili, si introdurrà il diagramma ad albero come strumento utilizzabile in questa attività. Una spiegazione possibile potrebbe essere la seguente: "Disegniamo ora un diagramma per rappresentare le fasi necessarie per la costruzione della torre. Il diagramma ha la forma di un albero con una ramificazioni a ogni piano. Nella Figura 7 puoi vedere come abbiamo cominciato il diagramma. Completa ora il diagramma da solo".

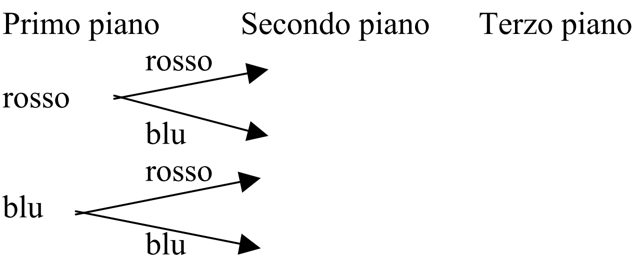

Figura 7

Il diagramma si può presentare anche usando materiali manipolativi (regoli incapsulabili eccetera).

Una volta che l'allievo abbia compreso la tecnica di costruzione del diagramma ad albero si può rendere esplicita la regola del prodotto per il calcolo del numero di elementi che si ottengono al formare tutte le coppie possibili a partire da due o più insiemi di elementi.

Si posso effettuare i giochi precedenti cambiando le regole e ponendo la condizione che gli elementi non si possono ripetere. Per esempio, si può chiedere: "Quanti torri diverse di 2 piani si possono fare con 3 colori senza mai ripeterne alcuno?".

Come criterio generale applicabile alle diverse unità didattiche, si deve suggerire all'allievo che tratti di risolvere i problemi con gli strumenti che ha a propria disposizione, Nel caso di questa unità, egli può trovare processi sistematici di calcolo e forme proprie di rappresentazione, mediante prova ed errore, Collettivamente si presenteranno e discuteranno le risoluzioni offerte dagli stessi allievi.

CONNESSIONI MATEMATICHE

La regola del prodotto è una nuova applicazione della moltiplicazione di numeri naturali che l'allievo già conosce. I problemi relativi alla regola del prodotto sono una categoria speciale all'interno dei problemi moltiplicativi. Di conseguenza, questa unità didattica può essere utilizzata nell'apprendimento della moltiplicazione già nei livelli scolastici anteriori.

I diagrammi ad albero avranno una grande utilità successivamente, nella combinatoria e in probabilità. Questo diagramma semplifica l'introduzione dell'idea di esperimento aleatorio composto e il calcolo delle probabilità di eventi composti, applicando la regola del prodotto nella probabilità. In tutta l'unità si usa in modo implicito il prodotto cartesiano di insiemi, in modo che queste situazioni potrebbero essere usate come elementi per introdurre questo contenuto matematico.

4. Risoluzioni delle situazioni, dei problemi e degli esercizi dell'unità didattica

(Si possono trovare in Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 2004, pp. 129-131).

[Traduzione di Bruno D'Amore]